

第2讲 圆周角定理及应用（练习）

一、弧、弦、圆心角关系

练习

1. 下列图形中表示的角是圆心角的是（ ）。



【答案】A

【解析】根据圆心角的定义：顶点在圆心的角是圆心角，可知B，C，D项图形中的顶点都不在圆心上，
所以它们都不是圆心角。
故选A。

【标注】【知识点】圆心角和圆周角

练习

2. 解答下列各题。

（1）下列说法中，正确的是（ ）。

- | | |
|-----------------|----------------|
| A. 等弦所对的弧相等 | B. 等弧所对的弦相等 |
| C. 圆心角相等，所对的弦相等 | D. 弦相等所对的圆心角相等 |

（2）下列说法中正确的是（ ）。

- | | |
|-----------------|---------------|
| A. 相等的圆心角所对的弧相等 | B. 等弧所对的圆心角相等 |
| C. 相等的弦所对的弦心距相等 | D. 弦心距相等，则弦相等 |

【答案】（1）B

（2）B

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

3. 已知下列命题：①长度相等的两条弧所对的圆心角相等．②直径是圆的最长的弦，也是圆的对称轴．③平分弦的直径垂直于这条弦．④在同圆或等圆中，相等的弦所对的圆周角相等．
其中错误命题的个数为（ ）．

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】 D

【解析】 ①同弧包括长度相等和弧度相等，所以错，
②对称轴是直径所在直线，所以错，
③平分弦（直径）的直径垂直于弦，
④在同圆或等圆中相等弦所对圆周角相等或互补．

【标注】 【知识点】圆的定义

【知识点】圆周角定理以及应用

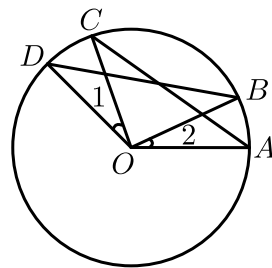
【知识点】弧、弦、圆心角关系

【知识点】圆中对称性

【知识点】垂径定理以及应用

练习

4. 如图，已知 A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的点， $\angle 1 = \angle 2$ ，则下列结论中正确的有 _____．（写出序号）
①弧 AB = 弧 CD ；②弧 BD = 弧 AC ；③ $AC = BD$ ；④ $\angle BOD = \angle AOC$ ．

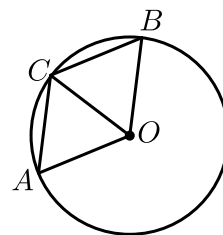


【答案】 ①②③④

【解析】 $\because \angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \widehat{CD} = \widehat{AB}$, $\angle DOB = \angle AOC$,
 $\therefore \widehat{BD} = \widehat{AC}$,
 $\therefore AC = BD$,
 $\therefore$ ①②③④正确．

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

5. 如图， A 、 B 是半径为3的 $\odot O$ 上的两点，若 $\angle AOB = 120^\circ$ ， C 是 $\widehat{AB}$ 的中点，则四边形 $AOBC$ 的周长为_____.

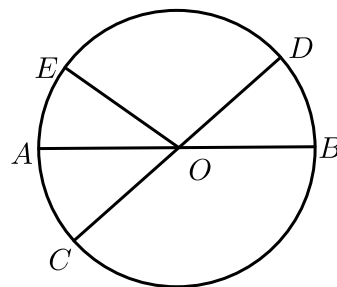


【答案】12

【解析】根据圆心角，弦，弧关系定理.

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

6. 如图， AB ， CD 是 $\odot O$ 的直径， $\widehat{AE} = \widehat{BD}$ ，若 $\angle AOE = 32^\circ$ ，则 $\angle COE$ 的度数是（ ）.



A. 32°

B. 60°

C. 68°

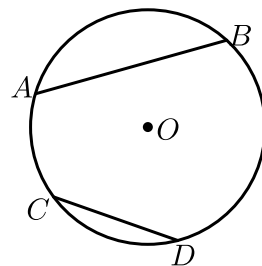
D. 64°

【答案】D

【解析】 $\because \widehat{AE} = \widehat{BD}$ ，
 $\therefore \angle BOD = \angle AOE = 32^\circ$ ，
又 $\because \angle BOD = \angle AOC$ ，
 $\therefore \angle AOC = 32^\circ$ ，
 $\therefore \angle COE = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$.
故选D.

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

7. 如图，在 $\odot O$ 中， $AB = 2CD$ ，那么（ ）.



A. $\widehat{AB} > 2\widehat{CD}$

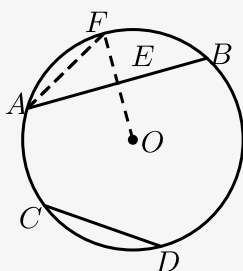
B. $\widehat{AB} < 2\widehat{CD}$

C. $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$

D. $\widehat{AB}$ 与 $2\widehat{CD}$ 的大小关系无法比较

【答案】 A

【解析】 如图，



过 O 作半径 $OF \perp AB$ 于 E ，连接 AF ；

由垂径定理知： $AE = BE$ ， $\widehat{AF} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ ；

$$\therefore AE = CD = \frac{1}{2}AB;$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $AF > AE$ ，则 $AF > CD$ ；

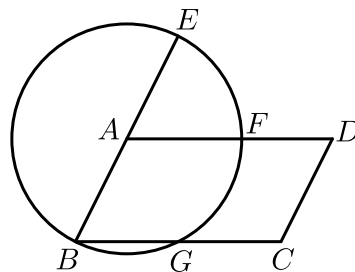
$\therefore \widehat{AF} > \widehat{CD}$ ，即 $\widehat{AB} > 2\widehat{CD}$ ；

故选：A.

【标注】 【知识点】 弧、弦、圆心角关系

【知识点】 垂径定理以及应用

8. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，以 A 为圆心， AB 为半径的圆分别交 AD 、 BC 于点 F 、 G ，交 BA 的延长线于点 E ，求证： $\widehat{EF} = \widehat{FG}$ 。



【答案】证明见解析 .

【解析】连接 AG .

$\because A$ 为圆心 , $\therefore AB = AG$,

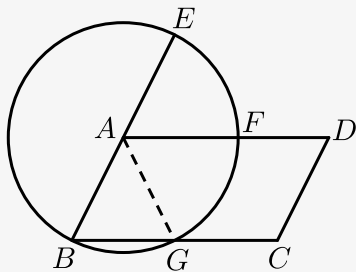
$\therefore \angle ABG = \angle AGB$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ,

$\therefore AD \parallel BC$, $\angle AGB = \angle DAG$, $\angle EAD = \angle ABG$,

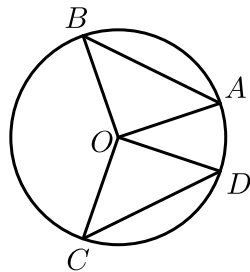
$\therefore \angle DAG = \angle EAD$,

$\therefore \widehat{EF} = \widehat{FG}$.



【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

9. 如图 , 在 $\odot O$ 中 , $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, 求证 : $\angle B = \angle C$.



【答案】证明见解析 .

【解析】方法一 : $\because$ 在 $\odot O$ 中 , $\widehat{AB} = \widehat{CD}$,

$\therefore \angle AOB = \angle COD$.

$\because OA = OB = OC = OD$,

$\therefore$ 在 $\triangle AOB$ 中 , $\angle B = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$,

在 $\triangle COD$ 中 , $\angle C = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle COD$,

$\therefore \angle B = \angle C$.

方法二 : $\because$ 在 $\odot O$ 中 , $\widehat{AB} = \widehat{CD}$,

$\therefore AB = CD$.

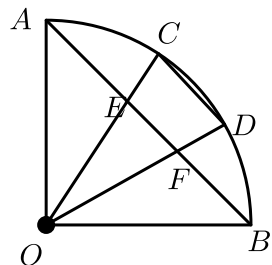
$\because OA = OB, OC = OD$,

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD (SSS),$$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

【标注】【知识点】圆与全等

10. 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, C 、 D 是 $\widehat{AB}$ 的三等分点, AB 分别交 OC 、 OD 于点 E 、 F , 求证:
 $AE = CD$.



【答案】证明见解析.

【解析】方法一: C 、 D 是弧 AB 的三等分点, 则 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOB = 30^\circ$,

$$AC = CD = DB$$

$$AO = OB, \angle AOB = 90^\circ, \text{ 则 } \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$$

$$OA = OC, \angle AOC = 30^\circ, \text{ 则 } \angle OAC = 75^\circ, \angle OAB = 45^\circ, \text{ 则 } \angle BAC = 30^\circ,$$

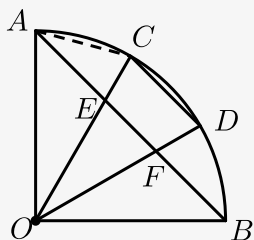
$$\angle ACO = \angle CAO = 75^\circ, \text{ 则 } \angle AEC = 75^\circ, \text{ 则三角形 } ACE \text{ 是等腰三角形,}$$

$$AC = AE, AC = CD, \text{ 则 } AE = CD$$

同理可证 $BF = CD$, 所以 $AE = BF = CD$.

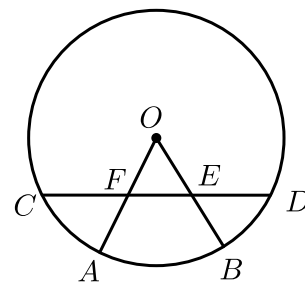
方法二: 连结 AC , 利用铺垫的结论证明 $CD \parallel AB$, 可知 $\angle CEA = \angle C$, 可证

$$\angle ACO = \angle DCO, \therefore \angle ACE = \angle AEC, \therefore AC = AE, \because AC = CD, \therefore AE = CD$$



【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

11. 如图, CD 是 $\odot O$ 的弦, 半径 OA 、 OB 分别交 CD 于 F 、 E 两点, $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. 求证: $OE = OF$.



【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\triangle OEF$ 是等腰三角形 .

理由 : 连接 OC , OD ,

$$\therefore OC = OD ,$$

$$\therefore \angle OCE = \angle ODF .$$

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BD} ,$$

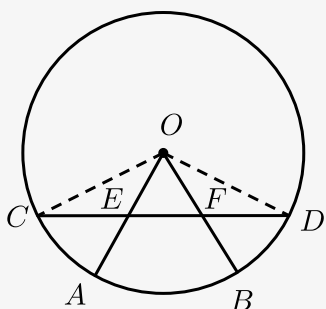
$$\therefore \angle COE = \angle DOF .$$

在 $\triangle COE$ 与 $\triangle DOF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle COE = \angle DOF \\ OC = OD \\ \angle OCE = \angle ODF \end{cases} ,$$

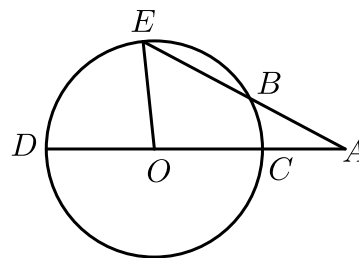
$$\therefore \triangle COE \cong \triangle DOF (ASA) ,$$

$$\therefore OE = OF .$$



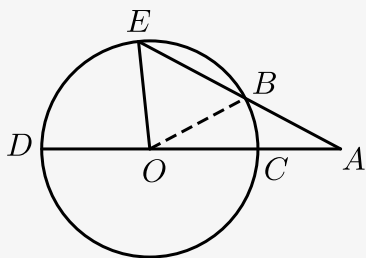
【标注】 【知识点】 弧、弦、圆心角关系

12. 如图 , CD 是 $\odot O$ 的直径 , $\angle EOD = 84^\circ$, AE 交 $\odot O$ 于点 B , 且 $AB = OC$, 求 $\angle A$ 的度数 .



【答案】 $\angle A = 28^\circ$.

【解析】 连接 OB , 如图 ,



$$\therefore AB = OC ,$$

$$\therefore AB = BO ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle A ,$$

$$\therefore \angle EBO = \angle BOC + \angle A = 2\angle A ,$$

$$\text{而 } OB = OE , \text{ 得 } \angle E = \angle EBO = 2\angle A ,$$

$$\therefore \angle EOD = \angle E + \angle A = 3\angle A ,$$

$$\text{而 } \angle EOD = 84^\circ ,$$

$$\therefore 3\angle A = 84^\circ ,$$

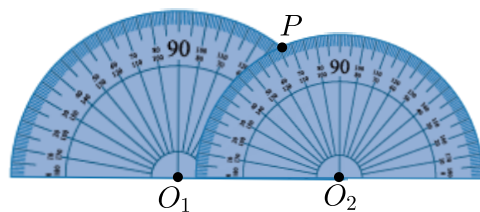
$$\therefore \angle A = 28^\circ .$$

【标注】 【知识点】 弧、弦、圆心角关系

二、 圆周角定理

练习

13. 如图, 将大小不同的两块量角器的零度线对齐, 且小量角器的中心 O_2 , 恰好在大量角器的圆周上, 设图中两圆周的交点为 P , 且点 P 在小量角器上对应的刻度为 63° , 那么点 P 在大量角器上对应的刻度为 (只考虑小于 90° 的角) () .



A. 54°

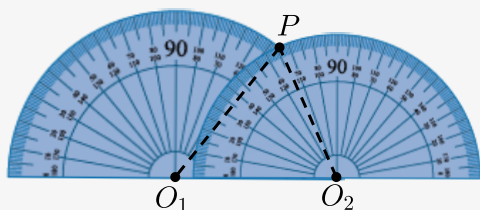
B. 55°

C. 56°

D. 57°

【答案】 A

【解析】连接 O_1P , O_2P , 如图,



$\therefore P$ 在小量角器上对应的刻度为 63° ,

即 $\angle O_1O_2P = 63^\circ$,

而 $O_1P = O_2O_1$,

$\therefore \angle O_1PO_2 = \angle O_1O_2P = 63^\circ$,

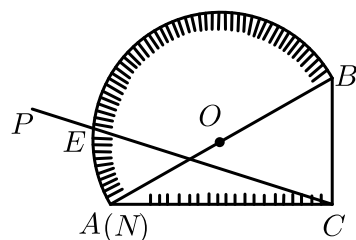
$\therefore \angle PO_1O_2 = 180^\circ - 63^\circ - 63^\circ = 54^\circ$,

即点 P 在大量角器上对应的刻度为 54° (只考虑小于 90° 的角) .

故选: A .

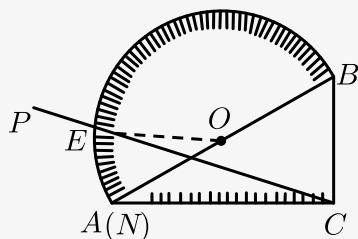
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

14. 如图, 量角器的直径与直角三角板 ABC 的斜边 AB 重合, 其中量角器零刻度线的端点 N 与点 A 重合, 射线 CP 从 CA 处出发沿顺时针方向以每秒4度的速度旋转, CP 与量角器的半圆弧交于点 E , 第18秒时, 点 E 在量角器上对应的读数是 _____ 度 .



【答案】 72

【解析】连结 OE , 如图,



$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 C 在量角器所在的圆上,

$\therefore \angle ACE = 18 \times 2^\circ = 36^\circ$,

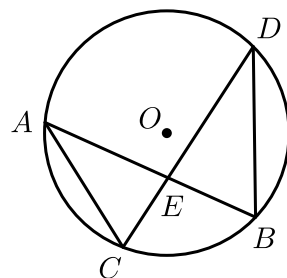
$$\therefore \angle AOE = 2\angle ACE = 72^\circ .$$

故答案为：72 .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

练习

15. 如图，两弦 AB 、 CD 相交于点 E ，且 $AB \perp CD$ ，若 $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\angle A$ 等于 _____ 度 .

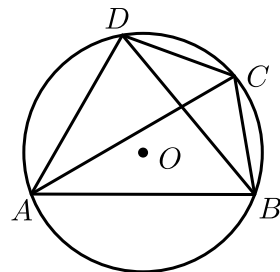


【答案】 30

【解析】 $\because \angle B = 60^\circ$,
 $\therefore \angle C = \angle B = 60^\circ$,
 $\because AB \perp CD$,
 $\therefore \angle AEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle A = 30^\circ$.
 故答案为：30 .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

16. 如图，点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上， $\widehat{CB} = \widehat{CD}$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ， $\angle ACD = 50^\circ$ ，则 $\angle ADB =$ _____ $^\circ$.



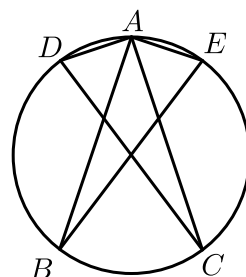
【答案】 70

【解析】在 $\odot O$ 中，

$$\begin{aligned}
 &\because \widehat{CB} = \widehat{CD}, \angle CAD = 30^\circ, \\
 &\therefore \angle CAB = \angle CAD = 30^\circ, \\
 &\therefore \angle DAB = 60^\circ. \\
 &\because \angle ABD = \angle ACD = 50^\circ, \\
 &\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle ABD = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ.
 \end{aligned}$$

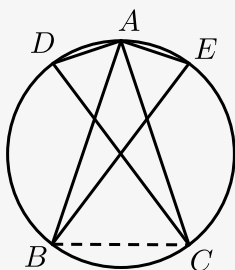
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

17. 如图， $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 都内接于同一个圆，则 $\angle ADC + \angle AEB + \angle BAC =$ _____ .



【答案】 180°

【解析】连接 BC ，如图所示，



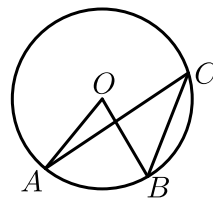
$$\begin{aligned}
 &\because \angle ABC = \angle ADC, \angle AEB = \angle ACB, \text{ 且 } \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ, \\
 &\therefore \angle ADC + \angle AEB + \angle BAC = 180^\circ.
 \end{aligned}$$

故答案为： 180° 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

练习

18. 如图， A, B, C 是 $\odot O$ 上的三个点，若 $\angle C = 35^\circ$ ，则 $\angle AOB$ 的度数为（ ）。



A. 35°

B. 55°

C. 65°

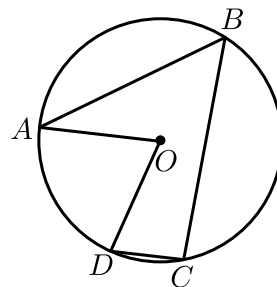
D. 70°

【答案】 D

【解析】 由圆周角定理可知， $\angle AOB = 2\angle C = 70^\circ$.

【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

19. 如图， A 、 B 、 C 、 D 四个点均在 $\odot O$ 上， $\angle AOD = 70^\circ$ ， $AO \parallel DC$ ，则 $\angle B$ 的度数为（ ） .



A. 40°

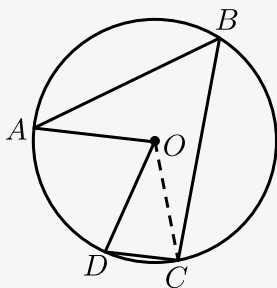
B. 45°

C. 50°

D. 55°

【答案】 D

【解析】 连接 OC ，



$$\because AO \parallel DC,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle AOD = 70^\circ,$$

$$\because OD = OC,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OCD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 40^\circ,$$

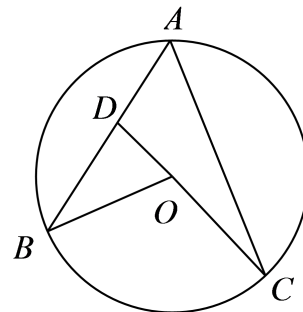
$$\therefore \angle AOC = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = 55^\circ.$$

故选：D．

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

20. 如图，点 A, B, C 在 $\odot O$ 上， CO 的延长线交 AB 于点 D ， $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数为_____．



【答案】 110°

【解析】方法一： $\because \angle A = 50^\circ$ ，

$$\therefore \angle BOC = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BOD = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ.$$

方法二： $\because \angle A = 50^\circ$ ，

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 100^\circ,$$

$$\because \angle B = 30^\circ, \angle BOC = \angle B + \angle BDC,$$

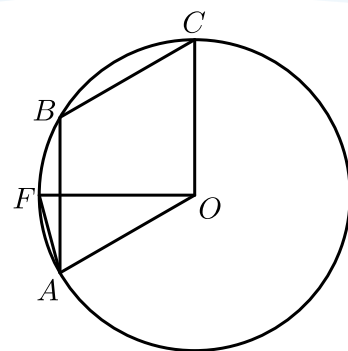
$$\therefore \angle BDC = \angle BOC - \angle B = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle BDC = 110^\circ.$$

故答案为： 110° ．

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

21. 如图，点 A, B, C 是圆 O 上的三点，且四边形 $ABCO$ 是平行四边形， $OF \perp OC$ 交圆 O 于点 F ，则 $\angle BAF$ 等于（ ）．



A. 12.5°

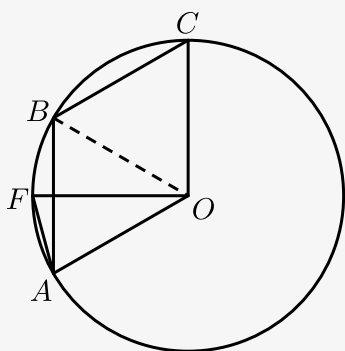
B. 15°

C. 20°

D. 22.5°

【答案】 B

【解析】 连接 OB ,



$\because$ 四边形 $ABCO$ 是平行四边形 ,

$\therefore OC = AB$,

又 $OA = OB = OC$,

$\therefore OA = OB = AB$,

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形 ,

$\because OF \perp OC$, $OC \parallel AB$,

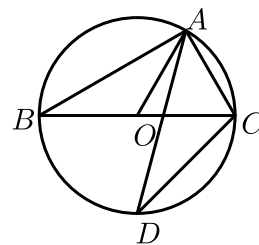
$\therefore OF \perp AB$,

$\therefore \angle BOF = \angle AOF = 30^\circ$,

由圆周角定理得 $\angle BAF = \frac{1}{2} \angle BOF = 15^\circ$.

【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

22. 如图 , 点 A 、 D 在 $\odot O$ 上 , BC 是 $\odot O$ 的直径 , 若 $\angle D = 35^\circ$, 则 $\angle OAB$ 的度数是 _____ .



【答案】 35°

【解析】 方法一： $\because \angle AOC = 2\angle D = 70^\circ$,

又 $\because OA = OB$,

$\therefore \angle ABO = \angle BAO$,

$\because \angle AOC = \angle ABO + \angle BAO$,

$\therefore \angle OAB = 35^\circ$.

方法二： $\because AO = BO$,

$\therefore \angle B = \angle BAO$,

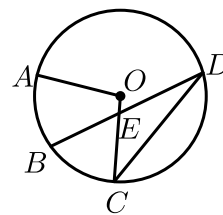
$\because \angle D = \angle B$ (同弧所对圆周角相等),

$\therefore \angle OAB = 35^\circ$,

故答案是： 35° .

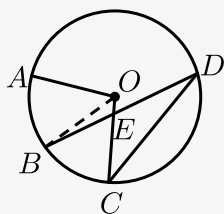
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

23. 如图, A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的四点, 且点 B 是 $\widehat{AC}$ 的中点, BD 交 OC 于点 E , $\angle AOC = 100^\circ$, $\angle OCD = 35^\circ$, 那么 $\angle OED =$ _____.



【答案】 60°

【解析】 连接 OB ,



$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$,
 $\therefore \angle AOB = \angle BOC = 50^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = 25^\circ$,
 $\therefore \angle OED = \angle ECD + \angle CDB$, $\angle ECD = 35^\circ$,
 $\therefore \angle OED = 60^\circ$,
 故答案为 60° .

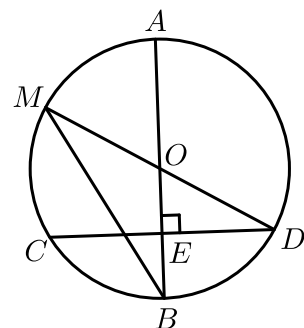
【标注】【知识点】三角形的外角定义及性质

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】垂径定理以及应用

【能力】推理论证能力

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，点 M 在 $\odot O$ 上， MD 恰好经过圆心 O ，连接 MB 。



- (1) 若 $CD = 16$, $BE = 4$, 求 $\odot O$ 的直径 .
 (2) 若 $\angle M = \angle D$, 求 $\angle D$ 的度数 .

【答案】(1) $\odot O$ 的直径是 20 .

(2) $\angle D = 30^\circ$.

【解析】(1) $\because AB \perp CD$, $CD = 16$,

$$\therefore CE = DE = 8 ,$$

$$\text{设 } OB = OD = x ,$$

$$\text{又 } \because BE = 4 ,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle OED \text{ 中 } , x^2 = (x - 4)^2 + 8^2 ,$$

$$\text{解得 } x = 10 ,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的直径是 } 20 .$$

$$(2) \because \angle M = \frac{1}{2} \angle BOD , \angle M = \angle D ,$$

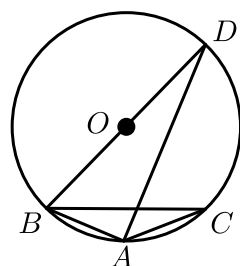
$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle BOD ,$$

$$\begin{aligned}
 &\because AB \perp CD, \\
 &\therefore \angle OED = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle D + \angle BOD = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle D = 30^\circ.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与勾股

练习

25. 如图， $\triangle ABC$ 内角 $\odot O$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = AC$ ， BD 为 $\odot O$ 的直径， $AB = 3$ ，则 AD 的值为（ ）。



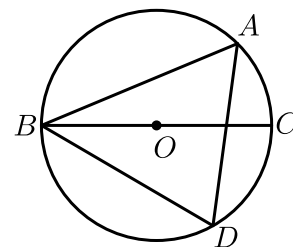
- A. $3\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{5}$ C. 5 D. 6

【答案】A

【解析】 $\because \angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = AC$ ，
 $\therefore \angle ACB = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$ ，
 $\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径，
 $\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ，
 $\because AB = 3$ ，
 $\therefore AD = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

26. 如图， BC 是 $\odot O$ 的直径， A ， D 是 $\odot O$ 上的两点，连接 AB ， AD ， BD ，若 $\angle ADB = 70^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数是（ ）。



A. 20°

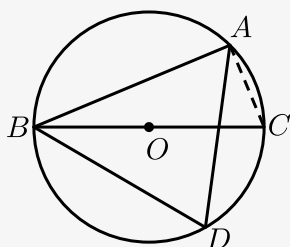
B. 70°

C. 30°

D. 90°

【答案】 A

【解析】 连接 AC ，如图，



$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ，

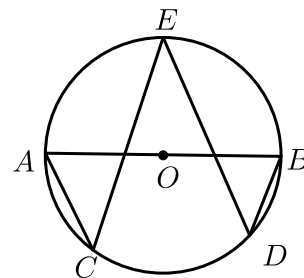
$\because \angle ACB = \angle ADB = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ 。

故选：A。

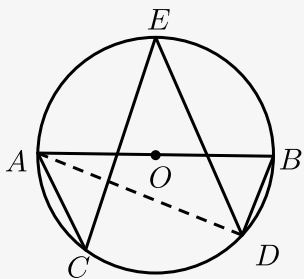
【标注】 【知识点】圆周角定理的推论

27. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 、 D 、 E 都是 $\odot O$ 上的点，则 $\angle ACE + \angle BDE =$ _____。



【答案】 90°

【解析】 连接 AD ，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 ,
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ$.
 $\because \angle ADE$ 与 $\angle ACE$ 是同弧所对的圆周角 ,
 $\therefore \angle ADE = \angle ACE$,
 $\therefore \angle ACE + \angle BDE = \angle ADB = 90^\circ$.
 故答案为 90° .

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

28. 在 $\odot O$ 中 , AB 是直径 , AC 是弦 , $\angle BAC = 40^\circ$, 弦 CD 交 AB 于点 E .

(1) 如图1 , 连接 AD , 求 $\angle ADC$ 的度数 .

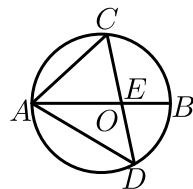


图 1

(2) 如图2 , 连接 OD , 若 $CD \perp AB$, 求 $\angle ODC$ 的度数 .

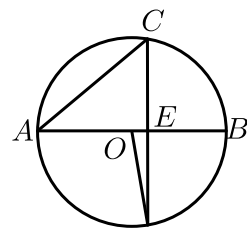


图 2

【答案】 (1) 50° .

(2) 10° .

【解析】 (1) $\because AB$ 为 $\odot O$ 直径 ,

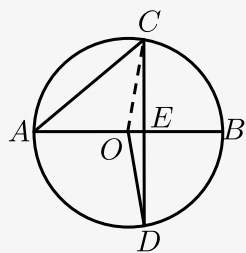
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\because \angle BAC = 40^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B = 50^\circ .$$

(2) 连接 OC ,



$$\because OA = OC ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACO = 40^\circ ,$$

$$\because CD \perp AB ,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ - \angle BAC = 50^\circ ,$$

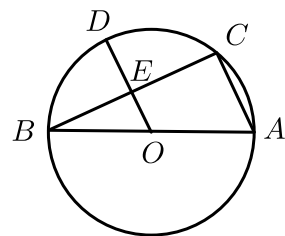
$$\therefore \angle OCD = \angle ACE - \angle ACO = 10^\circ ,$$

$$\because OC = OD ,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OCD = 10^\circ .$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

29. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, 连接 BC , AC , $OD \perp BC$ 于 E .



(1) 求证: $OD \parallel AC$.

(2) 若 $BC = 8$, $DE = 3$, 求 $\odot O$ 的直径.

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) \frac{25}{3} .$$

【解析】 (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 直径 ,

$$\therefore \angle C = 90^\circ ,$$

$$\because OD \perp BC ,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle C = 90^\circ ,$$

$$\therefore OD \parallel AC .$$

(2) 令 $\odot O$ 半径为 r ,

$$BE = CE = \frac{1}{2}BC = 4,$$

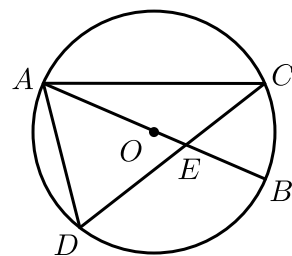
$$\therefore r^2 = 4^2 + (r-3)^2,$$

$$\therefore r = \frac{25}{6},$$

$$\therefore \odot O \text{ 直径为 } \frac{25}{3}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股

30. 如图, AB 是圆 O 的直径, C, D 分别为圆周上直径 AB 两侧的点, 若 $\angle ADC = 3\angle CAB$.



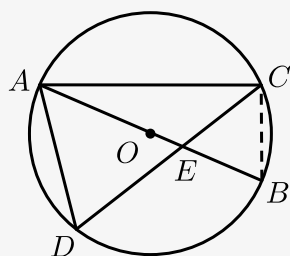
(1) 求 $\angle CAB$ 的度数.

(2) 若圆 O 的半径为 4, 求点 C 到 AB 的距离.

【答案】(1) 22.5° .

(2) $2\sqrt{2}$.

【解析】(1) 连接 BC ,



$\because AB$ 是圆 O 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle B = 90^\circ,$$

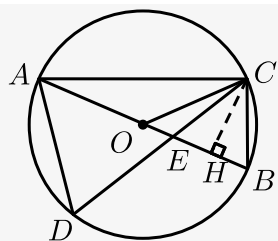
$$\because \angle ADC = \angle B, \angle ADC = 3\angle CAB,$$

$$\therefore 4\angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 22.5^\circ,$$

故答案为: 22.5° .

(2) 由 (1) 可知: $\angle CAB = 22.5^\circ$,



$$\therefore \angle COB = 45^\circ,$$

过C作 $CH \perp AB$ ，交AB于H，

$$\because R = 4, \angle COH = 45^\circ,$$

$$\therefore CH = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore C \text{ 到 } AB \text{ 距离为 } 2\sqrt{2}.$$

故答案为： $2\sqrt{2}$ 。

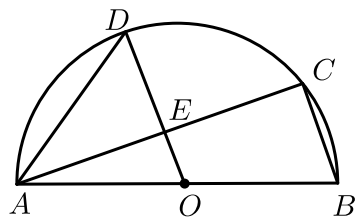
【标注】【能力】运算能力

【知识点】弧、弦、圆心角关系

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】解直角三角形

31. 如图，AB是半圆O的直径，C、D是半圆O上的两点，且 $OD \parallel BC$ ，OD与AC交于点E。



(1) 若 $\angle B = 70^\circ$ ，求 $\angle CAD$ 的度数。

(2) 若 $AB = 4$ ， $AC = 3$ ，求DE的长。

【答案】(1) 35° 。

$$(2) 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

【解析】(1) $\because AB$ 是半圆O的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEO = 90^\circ, \text{ 即 } OE \perp AC,$$

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ, \angle AOD = \angle B = 70^\circ,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle ADO = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle DAO - \angle CAB = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ.$$

(2) 在直角 $\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$,

$$\therefore OE \perp AC,$$

$$\therefore AE = EC,$$

$$\text{又} \because OA = OB,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

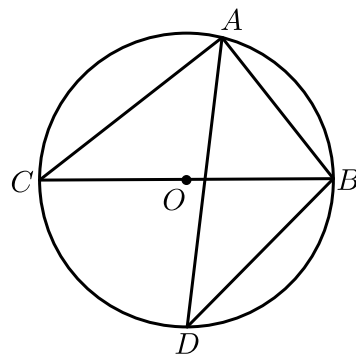
$$\text{又} \because OD = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore DE = OD - OE = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股

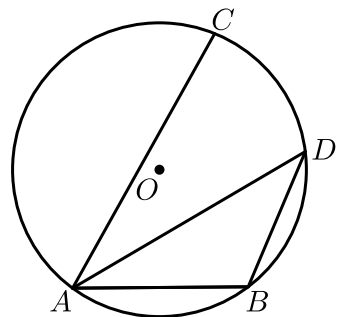
32. 已知点 A , 点 B , 点 C 在 $\odot O$ 上, $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D .

(1) 如图①, 若 BC 为 $\odot O$ 的直径, 求 $\angle CBD$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 若 $\angle CAB = 60^\circ$, $BD = 5$, 求 $\odot O$ 的半径.



图②

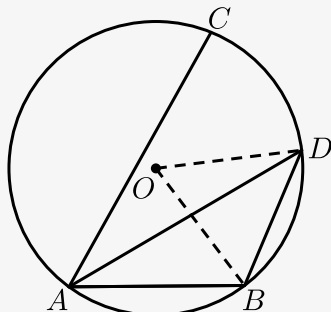
【答案】(1) 45° .

(2) 5.

【解析】(1) $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\begin{aligned}\therefore \angle BAC &= 90^\circ, \\ \therefore AD &\text{平分} \angle BAC, \\ \therefore \angle CAD &= \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ, \\ \therefore \angle CBD &= \angle CAD = 45^\circ.\end{aligned}$$

(2) 连接 OB, OD .

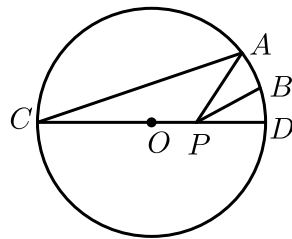


$$\begin{aligned}\therefore \angle CAB &= 60^\circ, AD \text{ 平分 } \angle CAB, \\ \therefore \angle BAD &= \frac{1}{2} \angle CAB = 30^\circ, \\ \therefore \angle BOD &= 2\angle BAD = 60^\circ, OB = OD, \\ \therefore \triangle OBD &\text{ 是等边三角形}, \\ \therefore OB &= BD = 5, \\ \therefore \odot O &\text{ 的半径为 } 5.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

练习

33. 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, $CD = 4$, $\angle ACD = 20^\circ$, B 为弧 AD 的中点, P 是直径 CD 上的一个动点, 则 $PA + PB$ 的最小值为 _____.

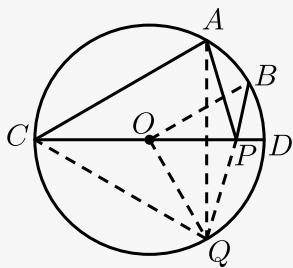


【答案】2

【解析】作 A 关于 CD 的对称点 Q ,
连接 CQ, BQ, BQ 交 CD 于 P ,
此时 $AP + PB = QP + PB = QB$,

根据两点之间线段最短， $PA + PB$ 的最小值为 QB 的长度，

连接 OQ ， OB ，



$\because$ 点 B 为弧 AD 的中点，

$\therefore \angle BOD = \angle ACD = 20^\circ$ ，

$\therefore \angle QOD = 2\angle QCD = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle BOQ = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$ 。

$\because OB = OQ$ ，

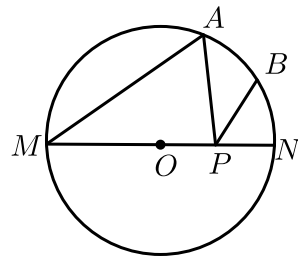
$\therefore \triangle BOQ$ 是等边三角形，

$BQ = OB = \frac{1}{2}CD = 2$ ，即 $PA + PB$ 的最小值为2。

故答案为：2。

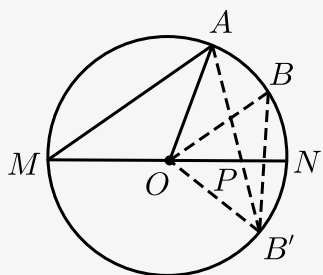
【标注】【知识点】圆与最值问题

34. 如图， MN 是 $\odot O$ 的直径， $MN = 4$ ，点 A 在 $\odot O$ 上， $\angle AMN = 30^\circ$ ， B 为 $\widehat{AN}$ 的中点， P 是直径 MN 上一动点，则 $PA + PB$ 的最小值为 _____。



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 作点 B 关于 MN 的对称点 B' ，连接 AB' ， BO ， $B'O$ ，

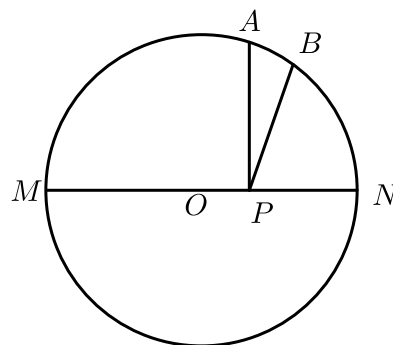


$\because \angle AMN = 30^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AON = 60^\circ, \\
&\therefore B \text{ 为 } \widehat{AN} \text{ 的中点}, \\
&\therefore \widehat{AB} = \widehat{BN}, \\
&\therefore \angle AOB = \angle BON = \frac{1}{2} \angle AON = 30^\circ, \\
&\therefore \angle B'ON = \angle BON = 30^\circ, \\
&\therefore \angle AOB' = \angle AON + \angle B'ON = 90^\circ, \\
&\text{在 Rt}\triangle AOB' \text{ 中}, OA = OB' = 2, AB' = 2\sqrt{2}, \\
&(PA + PB)_{\min} = PA + PB' = AB' = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆中最值

35. 如图, MN 是 $\odot O$ 的直径, $MN = 8$, $\angle AMN = 40^\circ$, 点 B 为弧 AN 的中点, 点 P 是直径 MN 上的一个动点, 则 $PA + PB$ 的最小值为 () .



- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

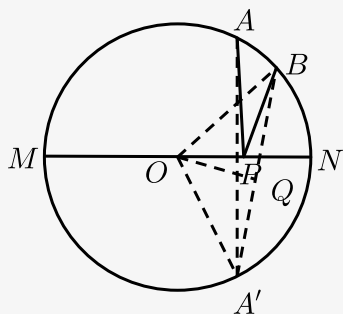
【答案】D

【解析】过 A 作关于直线 MN 的对称点 A' , 连接 $A'B$, 由轴对称的性质可知 $A'B$ 即为 $PA + PB$ 的最小值,

$$\begin{aligned}
&\text{连接 } OB, OA', AA', \\
&\therefore AA' \text{ 关于直线 } MN \text{ 对称}, \\
&\therefore \widehat{AN} = \widehat{A'N}, \\
&\therefore \angle AMN = 40^\circ, \\
&\therefore \angle A'ON = 80^\circ, \angle BON = 40^\circ, \\
&\therefore \angle A'OB = 120^\circ, \\
&\text{过 } O \text{ 作 } OQ \perp A'B \text{ 于 } Q, \\
&\text{在 Rt}\triangle A'OQ \text{ 中}, OA' = 4, \\
&\therefore A'B = 2A'Q = 4\sqrt{3},
\end{aligned}$$

即 $PA + PB$ 的最小值 $4\sqrt{3}$,

故选 D .

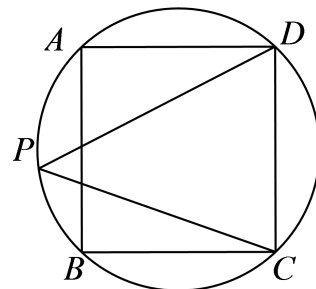


【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

三、圆内接四边形

练习

36. 如图，正方形 $ABCD$ 四个顶点都在 $\odot O$ 上，点 P 是在弧 AB 上的一点，则 $\angle CPD$ 的度数是 () .



A. 35°

B. 40°

C. 45°

D. 60°

【答案】C

【解析】连接 AC ，如图，

$\because$ 四边形 $ABCD$

为正方形，

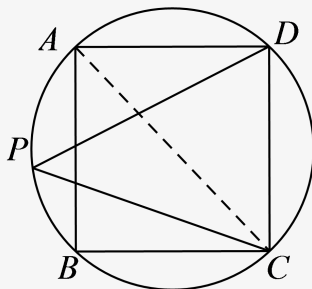
$\therefore \angle CAD = 45^\circ$

,

又 $\because$

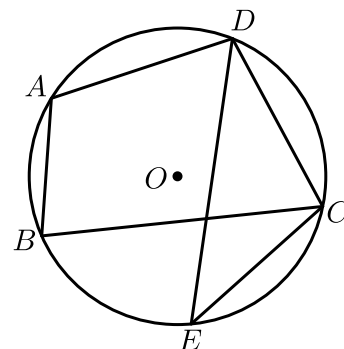
$\angle CPD = \angle CAD$,

$\therefore \angle CPD = 45^\circ$.



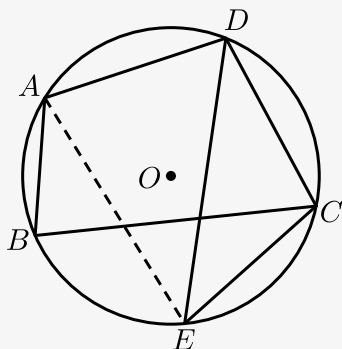
【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

37. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，点 D 是 $\widehat{AC}$ 的中点，点 E 是 $\widehat{BC}$ 上的一点，若 $\angle CED = 40^\circ$ ，则 $\angle ADC =$ _____.



【答案】 100°

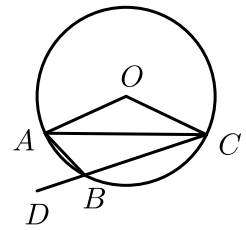
【解析】如图，连接 AE ，



$\because$ 点 D 是 $\widehat{AC}$ 的中点，
 $\therefore \angle AED = \angle CED$ ，
 $\because \angle CED = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle AEC = 2\angle CED = 80^\circ$ ，
 $\because$ 四边形 $ADCE$ 是圆内接四边形，
 $\therefore \angle ADC + \angle AEC = 180^\circ$ ， $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle AEC = 100^\circ$ ，

【标注】【知识点】圆内接四边形的性质定理；圆内接四边形综合

38. 已知：如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， D 为 CB 延长线上一点， $\angle AOC = 130^\circ$ ，则 $\angle ABD$ 的度数为（ ）.



A. 40°

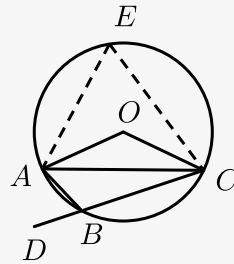
B. 50°

C. 65°

D. 100°

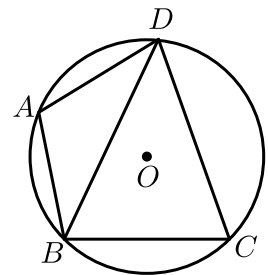
【答案】 C

【解析】 在优弧 AC 上任意找一点 E ，连接 AE 、 CE ，
根据圆周角定理，得 $\angle E = 65^\circ$.
 $\because$ 四边形 $ABCE$ 内接于 $\odot O$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle E = 65^\circ$.
故选：C .



【标注】 【知识点】 圆内接四边形综合

39. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $AB = AD$ ，若 $\angle C = 68^\circ$ ，则 $\angle ABD$ 的度数为 _____ .

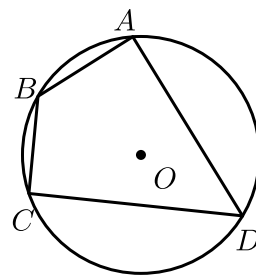


【答案】 34°

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，
 $\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle A = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$.
 $\because AB = AD$ ，
 $\therefore \angle ABD = \angle ADB$ ，
 $\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 112^\circ) = 34^\circ$.

【标注】 【知识点】 圆内接四边形综合

40. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， $\angle B = 135^\circ$ ，则 $\angle AOC$ 的度数是_____.



【答案】 90°

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle B = 45^\circ,$$

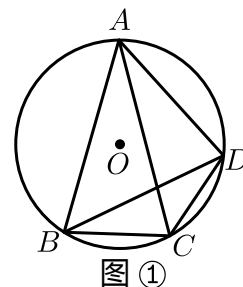
由圆周角定理得， $\angle AOC = 2\angle D = 90^\circ$ ，

故答案为： 90° 。

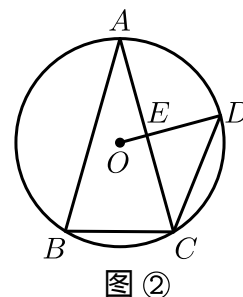
【标注】【知识点】圆内接四边形综合

41. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $AB = AC$ ， $\angle ABC = 75^\circ$ ， D 是 $\odot O$ 上的点。

(1) 如图①，求 $\angle ADC$ 和 $\angle BDC$ 的大小。



(2) 如图②， $OD \perp AC$ ，垂足为 E ，求 $\angle ODC$ 的大小。



【答案】 (1) $\angle ADC = 105^\circ$ ， $\angle BDC = 30^\circ$ 。

(2) $\angle ODC = 52.5^\circ$ 。

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，

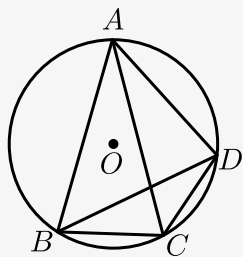


图 ①

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ ,$$

$$\because AB = AC ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BAC ,$$

$$\therefore \angle BDC = 30^\circ .$$

(2) 连接 OC 、 OA ,

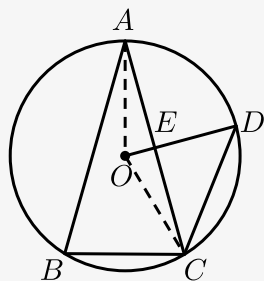


图 ②

$$\because \angle ABC = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 75^\circ = 150^\circ ,$$

$$\text{又} \because OD \perp AC ,$$

$$\therefore \angle DOC = \frac{1}{2} \angle AOC = 75^\circ ,$$

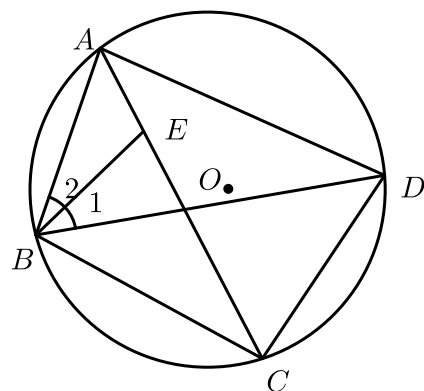
$$\text{又} \because OD = OC ,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC ,$$

$$\therefore \angle ODC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle DOC) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 75^\circ) = 52.5^\circ .$$

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

42. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O ，点 E 在对角线 AC 上 .



- (1) 若 $BC = DC$, $\angle CBD = 39^\circ$, 求 $\angle BCD$ 的度数 .
- (2) 若在 AC 上有一点 E , 且 $EC = BC = DC$, 求证: $\angle 1 = \angle 2$.

【答案】 (1) $\angle BCD = 102^\circ$.

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because BC = CD$,

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{DC} ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \angle CBD = 39^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = 78^\circ ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形 ,

$$\therefore \angle BCD = 102^\circ .$$

(2) $\because BC = CD$,

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB , \text{ 又 } \angle BAC = \angle BDC ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle BAE ,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle BAE + \angle 2 ,$$

$$\because CB = CE ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CEB ,$$

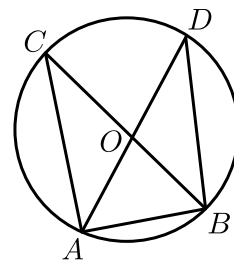
$$\therefore \angle BAE + \angle 2 = \angle CBD + \angle 1 ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 .$$

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

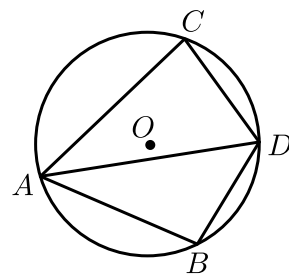
43. 如图, 已知 $\odot O$ 的直径为 10, 点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上, $\angle CAB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D .

- (1) 图①, 当 BC 为 $\odot O$ 的直径时, 求 BD 的长 .



图①

(2) 图② , 当 $BD = 5$ 时 , 求 $\angle CDB$ 的度数 .

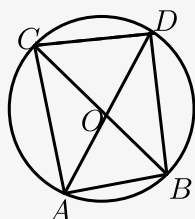


图②

【答案】 (1) $BD = 5\sqrt{2}$

(2) $\angle CDB = 120^\circ$.

【解析】 (1) 连接 CD ,



图①

$\because BC$ 为 $\odot O$ 直径 ,

$\therefore \angle CDB = \angle CAB = 90^\circ$,

$\because AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线 ,

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle CAB = 45^\circ$,

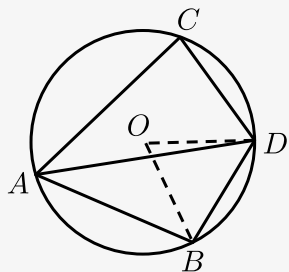
$\therefore \angle DBC = \angle DAC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle DBC$ 为等腰直角三角形 ,

$\because BC = 10$,

$\therefore BD = 5\sqrt{2}$.

(2) 连接 OD 、 OB ,

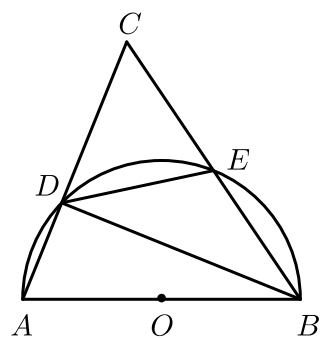


$\because \odot O$ 直径为 10 ,
 $\therefore OB = OD = 5$,
 $\therefore BD = 5$,
 $\therefore OB = OD = BD$,
 $\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle BOD = 60^\circ$,
 $\therefore \widehat{CD} = \widehat{DB}$,
 $\therefore \angle CAD = \angle BAD = 30^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 60^\circ$,
 $\because$ 四边形 $CABD$ 是圆内接四边形 ,
 $\therefore \angle CDB + \angle BAC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle CDB = 120^\circ$.

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

44. 已知, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 68^\circ$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 AC , BC 的交点分别为 D , E .

(1) 如图①, 求 $\angle CED$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 当 $DE = BE$ 时, 求 $\angle C$ 的大小.

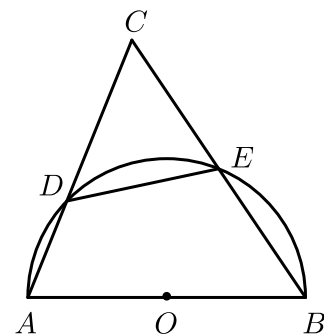


图 ②

【答案】(1) 68° .

(2) 56° .

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABED$ 圆内接四边形 ,

$$\therefore \angle A + \angle DEB = 180^\circ ,$$

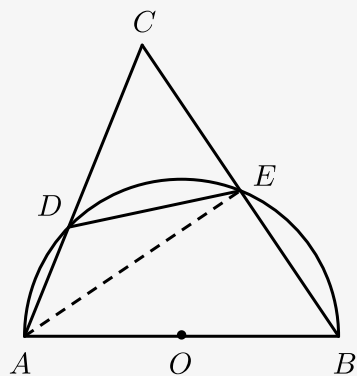
$$\because \angle CED + \angle DEB = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle A ,$$

$$\because \angle A = 68^\circ ,$$

$$\therefore \angle CED = 68^\circ .$$

(2) 连接 AE .



$$\because DE = BD ,$$

$$\therefore \widehat{DE} = \widehat{BE} ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle CAB = 34^\circ ,$$

$$\because AB \text{ 是直径 } ,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle DAE = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ .$$

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

45. 在 $\odot O$ 中, AB 是 $\odot O$ 直径, AC 是弦, $\angle BAC = 50^\circ$,

(1) 如图1, D 是 AB 上一点, $AD = AC$, 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 E , 求 $\angle CEO$ 的大小.

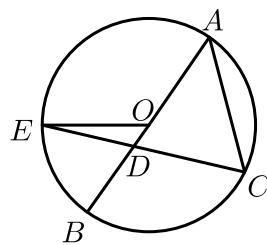


图 1

(2) 如图2, D 是 AC 延长线上一点, $AD = AB$, 连接 BD 交 $\odot O$ 于点 E , 求 $\angle CEO$ 的大小.

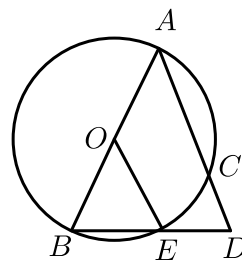


图 2

【答案】 (1) 15° .

(2) 65° .

【解析】 (1) $\because AD = AC, \angle A = 50^\circ$,

$$\therefore \angle C = \angle ADC = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle ADC$$

$$= 180^\circ - 65^\circ$$

$$= 115^\circ.$$

$$\because \angle AOE = 2\angle C = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle AOE - \angle ADE = 130^\circ - 115^\circ = 15^\circ.$$

(2) $\because AD = AB, \angle A = 50^\circ$,

$$\therefore \angle D = \angle B = 65^\circ,$$

$$\because OB = OE,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle B = 65^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABEC$ 是圆内接四边形,

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle A = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle CEO = \angle BEC - \angle OEB = 130^\circ - 65^\circ = 65^\circ.$$

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用